

ماتریس‌های خود معکوس

جابر مختاری دهقادی
مدرس ریاضی

ضمن تشکر از نویسنده محترم جناب آقای جابر مختاری دهقادی، لازم است قدردان زحمت جناب آقای دکتر بابلیان برای بازسازی این مقاله باشم.

سردبیر

اشاره

در این مقاله، یک روش جالب و ارزشمند مطرح می‌کنیم که بتوان از آن، ماتریس‌هایی پیدا کرد که معکوس خودشان باشند. ما این ماتریس‌ها را «خود معکوس» می‌نامیم. این مقاله در سطح معلومات دبیرستان است و می‌تواند برای همکاران فرهنگی رشته ریاضی، جالب و مفید باشد.

کلیدواژه‌ها: ماتریس، ریاضی دوره دبیرستان، ماتریس خود معکوس

مقدمه:

ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن با هم برابر باشند را ماتریس مربعی گویند. می‌دانیم ماتریس‌های مربعی که دترمینان غیر صفر دارند معکوس پذیر هستند. اگر معکوس A با خودش برابر باشد داریم:

$$A = A^{-1} \rightarrow A \times A = A \times A^{-1} \rightarrow A^T = I \\ \rightarrow \det A^T = \det I = 1 \rightarrow \det A = \pm 1$$

بنابراین اولین شرط این است که دترمینان ماتریس ۱ یا -۱ باشد.

ماتریس 2×2 :

می‌دانیم که در ماتریس‌های خود معکوس مانند A ، دترمینان ± 1 است، یعنی دترمینان در این نوع ماتریس‌ها، دو حالت دارد. حالت اول: اگر دترمینان ۱ باشد داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -b \rightarrow b = 0 \\ c = -c \rightarrow c = 0 \\ ad = 1 \rightarrow a = d = \pm 1 \end{cases} \quad (1)$$

لذا $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ تنها ماتریس‌های خود معکوس با دترمینان یک هستند.

حالت دوم: در صورتی که دترمینان -۱ باشد، با حل دستگاهی شبیه به (۱)

ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^T + 1}{b} & -a \end{bmatrix}$ که $b \neq 0$ حاصل می‌شود که خود معکوس است.

مثلاً اگر $a=2$ و $b=3$ آن‌گاه

ماتریس خود معکوس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. لذا بی‌نهایت از این ماتریس‌های 2×2 ، می‌توان به‌دست آورد.

برای ماتریس 3×3

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ \frac{-a^T + 1}{b} & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b \neq 0$ و دلخواه a دلخواه ماتریسی خود معکوس است. بنابراین، بی‌نهایت ماتریس خود معکوس از مرتبه 3×3 داریم.

برای ماتریس 4×4 :

ماتریس را به بلوک‌های 2×2 افراز می‌کنیم. فرض کنید ماتریس $A_{2 \times 2}$ خود معکوس و $O_{2 \times 2}$ ماتریس صفر باشد. در این صورت ماتریس‌هایی به شکل زیر معکوس‌پذیر هستند

$$\begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

لذا ماتریس‌های مرتبه زوج را می‌توان به‌صورت 2×2 افراز کرده و مانند فوق، ماتریس «خود معکوس» معرفی کرد.

ماتریس 5×5

$$\begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & 0 \\ O_{2 \times 2} & A_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

ماتریس 6×6 خود معکوسی که می‌توان معرفی کرد، به‌صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & A_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & A_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

و به همین صورت از هر مرتبه‌ای، می‌توان ماتریس خود معکوس نوشت.

این مقاله کاری کاملاً تحقیقی بوده و از هیچ منبعی استفاده نشده است. البته ممکن است ماتریس‌های $n \times n$ با $n \geq 3$ ، یافت به گونه‌ای که درایه صفر نداشته باشند.